深圳北理莫斯科大学

УНИВЕРСИТЕТ МГУ-ППИ В ШЭНЬЧЖЭНЕ

SHENZHEN MSU-BIT UNIVERSITY

Математическое моделирование и исследование моделей с помощью математических программ

数学建模及数学软件的使用

Лекция № 3-b

张晔

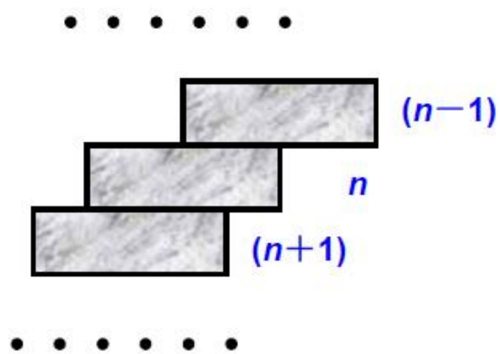
ye.zhang@smbu.edu.cn

Содержание курса

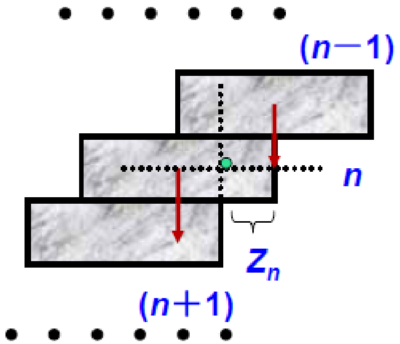
- 3 элементарные модели.

问题1: 叠砖头

- 将形状质量相同的砖块一一向右往外叠放，欲尽可能地延伸到远方，问最远可以延伸多大距离。



求解:



设砖块是均质的，长度与重量均为1，其重心在中点1/2砖长处，现用归纳法推导。

由第 n块砖受到的两个力的力矩相等，有：

$$1/2-Z_n=(n-1)Z_n$$

故$Z_n=1/(2n)$，从而上面 n块砖向右推出的总距离为，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$$

$$n\to+\infty\text{时},\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=+\infty$$

- 故砖块向右可叠至任意远，这一结果多少有点出人意料。

- 对吗？ Hint: k = 1/(2ε)

问题2: 桌子平衡问题

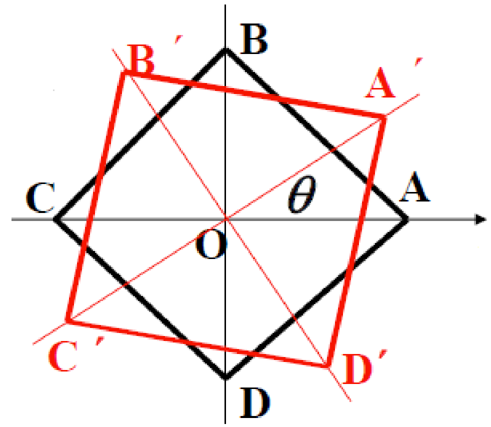
- 将一张四条腿的方桌放在不平的地面上，不允许将桌子移到别处，但允许其绕中心旋转，是否总能设法使其四条腿同时落地?

假设

- 地面为连续曲面
- 方桌的四条腿长度相同
- 相对于地面的弯曲程度而言，方桌的腿是足够长的
- 方桌的腿只要有一点接触地面就算着地

求解:

- **椅子位置**：利用正方形(椅脚连线)的对称性椅子位置
  - 用θ(对角线与x轴的夹角)表示椅子位置



正方形ABCD
绕O点旋转

- **四只脚着地**：椅脚与地面距离为零距离是θ的函数

四个距离
(四只脚)

正方形
对称性

两个距离

A,C 两脚与地面距离之和 $\sim f(\theta)$

B,D 两脚与地面距离之和 $\sim g(\theta)$

地面为连续曲面 ⇨ $f(\theta)$, $g(\theta)$是连续函数

椅子在任意位置至少三只脚着地 ⇨ 对任意θ, $f(\theta)$, $g(\theta)$至少一个为0

数学问题

已知：$f(\theta)$, $g(\theta)$是连续函数；

对任意θ，$f(\theta) \cdot g(\theta)=0$；

且 $g(0)=0$，$f(0) > 0$.

证明：存在θ_0，使$f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$.

给出一种简单、粗糙的证明方法

将椅子旋转90^0，对角线AC和BD互换。

由$g(0)=0$，$f(0) > 0$，知$f(\pi/2)=0$, $g(\pi/2)>0$.

令$h(\theta)= f(\theta)-g(\theta)$, 则$h(0)>0$和$h(\pi/2)<0$.

由 f, g的连续性知 h为连续函数, 据连续函数的基本性质, 必存在θ_0 , 使$h(\theta_0)=0$, 即$f(\theta_0) = g(\theta_0)$.

因为$f(\theta) \cdot g(\theta)=0$, 所以$f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$.

评注和思考

建模的关键 ~ θ和 $f(\theta)$, $g(\theta)$的确定

量纲分析法(Dimensional Analysis)建模

- 物理量大都带有量纲，其中基本量纲通常是质量（用M表示）、长度（用L表示）、时间（用T表示），有时还有温度（用Θ表示）
- 其他物理量的量纲可以用这些基本量纲来表示
- 如速度的量纲为LT^{-1}，加速度的量纲为LT^{-2}，力的量纲为MLT^{-2}，功的量纲为ML^2T^{-2}等

量纲分析法(Dimensional Analysis)建模

- **量纲分析的原理**：当度量量纲的基本单位改变时，公式本身并不改变，例如，无论长度取什么单位，矩形的面积总等于长乘宽，即公式S=ab并不改变。此外，在公式中只有量纲相同的量才能进行加减运算，例如面积与长度是不允许作加减运算的，这些限止在一定程度上限定了公式的可取范围，即一切公式都要求其所有的项具有相同的量纲，具有这种性质的公式被称为是“**量纲齐次**”(Dimensional Homogeneity)的。

问题3: 单摆的周期

质量m的小球系在长度为l的线的一段，偏离平衡位置后小球在重力mg的作用下做摆动，求小球的摆动周期t。

这个问题中出现的物理量有 t, m, l, g，不计空气阻力时可以假设它们之间有关系式

$$t \sim m^{\alpha} l^{\beta} g^{\gamma} \tag{4}$$

其中α、β 和 γ 是待定的常数，k 是无量纲的比例系数。(4)式的量纲表达式为

$$[t] = [m]^{\alpha}[l]^{\beta}[g]^{\gamma} \tag{5}$$

将 $[t]=T$，$[m]=M$，$[g]=LT^{-2}$，$[l]=L$ 代入上式后，我们得到

$$T = M^{\alpha} L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma} \tag{6}$$

根据量纲一致原则，我们可以导出一个关于待定常数的线性方程组

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\gamma = 1 \end{cases} \tag{7}$$

方程组(7)的解为 $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = -\frac{1}{2}$ 。将此结果代入到(7)式后，我们得到

$$t \sim \sqrt{l / g} \tag{8}$$

(8)式与实验得到的结果是一致的。