深圳北理莫斯科大学
УНИВЕРСИТЕТ МГУ-ППИ В ШЭНЬЧЖЭНЕ
SHENZHEN MSU-BIT UNIVERSITY

Математическое моделирование и исследование моделей с помощью математических программ

数学建模及数学软件的使用

Лекция № 4 (AHP)

张晔

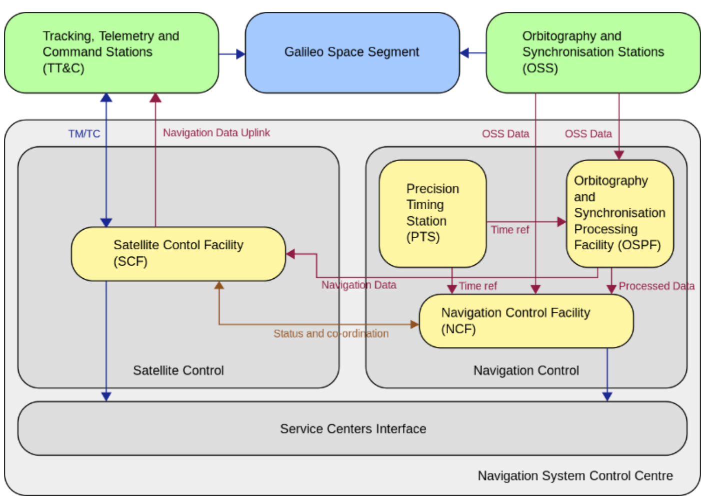
ye.zhang@smbu.edu.cn

Метод анализа иерархий/ Analytic Hierarchy Process/ 层次分析法

数学建模的方法：

- **机理分析：**用经典的数学分析工具分析现象的因果关系。
- **统计分析：**以随机数学为工具，通过大量观察数据寻求统计规律。
- **系统分析：**在研究特定系统结构中各部分（各子系统）的相互作用，系统的对外接口与界面，以及该系统整体的行为、功能和局限，从而为系统未来的变迁与有关决策提供参考和依据。
    - 系统分析的经常目标之一，在于改善决策过程及系统性能，以期达到系统的整体最优。

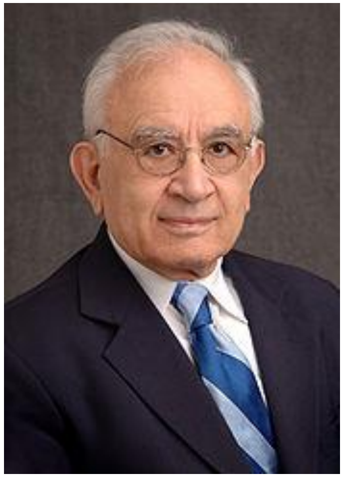
伽利略定位系统的系统分析架构



Метод анализа иерархий/ Analytic Hierarchy Process/ 层次分析法

- **层次分析法**是系统分析的工具之一。

- 1971 年 **Thomas L. Saaty** （匹兹堡大学）所发展出来，主要应用在不确定情况下及具有多数个评估准则的决策问题上。层次分析法发展的目的是将复杂的问题系统化，由不同层面给予层级分解，并透过量化的运算，找到脉络后加以综合评估。



层次分析法的基本步骤

1. **建立层次分析结构模型**
   - 深入分析实际问题，将有关因素自上而下分层（目标—准则或指标—方案或对象），上层受下层影响，而层内各因素基本上相对独立。

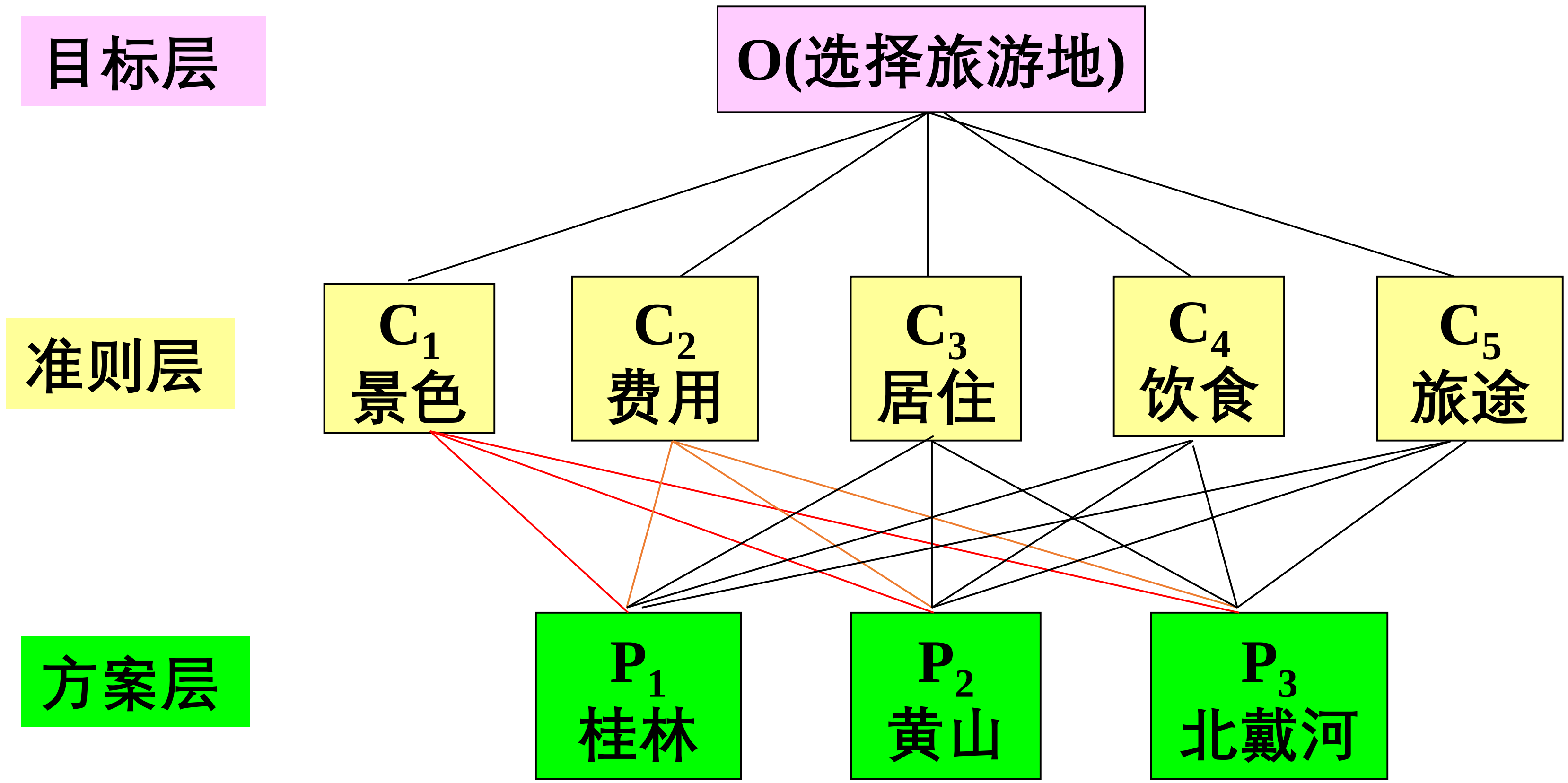
2. **构造成对比较阵**
   - 用成对比较法和1~9尺度，构造各层对上一层每一因素的成对比较阵。

3. **计算权向量并作一致性检验**
   - 对每一成对比较阵计算最大特征根和特征向量，作一致性检验，若通过，则特征向量为权向量。

4. **计算组合权向量（作组合一致性检验*）**
   - 组合权向量可作为决策的定量依据。

Пример: 选择旅游地

- 如何在3个目的地中按照景色、费用、居住条件等因素选择。



“选择旅游地”思维过程的归纳

- 日常工作、生活中的决策问题。
- 将决策问题分为3个层次：目标层O，准则层C，方案层P；每层有若干元素，各层元素间的关系用相连的直线表示。
- 通过相互比较确定各准则对目标的权重，及各方案对每一准则的权重。
- 将上述两组权重进行综合，确定各方案对目标的权重。

✓ 层次分析法将定性分析与定量分析结合起来完成以上步骤，给出决策问题的定量结果。

- **元素之间两两对比，对比采用相对尺度。**
- **设要比较各准则$C_1, C_2, \ldots, Cn$对目标O的重要性**

$$C_i : C_j \Rightarrow a_{ij}$$

$$A = (a_{ij})_{n \times n},\ a_{ij} > 0,\ a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$

选择旅游地

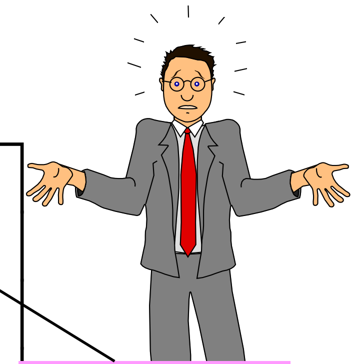
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A~成对比较阵

A是正互反阵

要由A确定$C_1, \ldots, C_n$对O的权向量

成对比较的不一致情况



$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & \cdots \\ 2 & 1 & 7 & \cdots \\ \cdots\cdots & & & \end{bmatrix}$$

不一致

$a_{12}=1/2\,(C_1:C_2)$

$a_{13}=4\,(C_1:C_3)$

一致比较 $\Rightarrow$ $a_{23}=8\,(C_2:C_3)$

允许不一致，但要确定不一致的允许范围

考察完全一致的情况

$$W(=1)\Rightarrow w_1, w_2, \cdots w_n$$

令 $a_{ij}=w_i/w_j$

$$w=(w_1,w_2,\cdots w_n)^T \sim \text{权向量}$$

$$A=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots\cdots & & & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

成对比较阵和权向量

成对比较完全一致的情况

满足 $a_{ij}\cdot a_{jk}=a_{ik},\quad i,j,k=1,2,\cdots,n$

的正互反阵*A*称一致阵，如

$$A=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots\cdots & & & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

一致阵性质

- *A*的秩为1，*A*的唯一非零特征根为*n*
- *A*的任一列向量是对应于*n* 的特征向量
- *A*的归一化特征向量可作为权向量

对于不一致（但在允许范围内）的成对比较阵*A*，建议用对应于最大特征根λ的特征向量作为权向量*w*，即

$$Aw=\lambda w$$

比较尺度a_{ij} Saaty等人提出1~9尺度——a_{ij} 取值 1,2,… , 9及其互反数1,1/2, … , 1/9

• 便于定性到定量的转化：

尺度 a_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_i : C_j$的重要性	相同		稍强		强		明显强		绝对强

$a_{ij} = 1,1/2, ,\ldots 1/9$ $\sim C_i : C_j$ 的重要性与上面相反

• 心理学家认为成对比较的因素不宜超过9个

• 用1~3,1~5,…1~17,…,1^p~9^p (p=2,3,4,5), d+0.1~d+0.9 (d=1,2,3,4)等27种比较尺度对若干实例构造成对比较阵，算出权向量，与实际对比发现，1~9尺度较优。

一致性检验：对A确定不一致的允许范围

已知：n 阶一致阵的唯一非零特征根为n

可证：n 阶正互反阵最大特征根$\lambda \geq n$, 且$\lambda = n$时为一致阵

定义一致性指标: $CI = \dfrac{\lambda - n}{n-1}$

CI 越大，不一致越严重

为衡量CI 的大小，引入随机一致性指标 RI——随机模拟得到a_{ij}，形成A，计算CI 即得RI。

Saaty的结果如下

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

定义一致性比率 $CR = CI/RI$

当CR<0.1时，通过一致性检验

0.1可以换成：高度一致指标等

“选择旅游地”中准则层对目标的权向量及一致性检验

准则层对目标的成对比较阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

最大特征根 λ=5.073

权向量（特征向量）w =(0.263,0.475,0.055,0.090,0.110)^T

一致性指标 $CI=\frac{5.073-5}{5-1}=0.018$

随机一致性指标 RI=1.12 (查表)

一致性比率 CR=0.018/1.12=0.016<0.1

通过一致性检验

组合权向量

记第2层（准则）对第1层（目标）的权向量为 $w^{(2)}=(w_1^{(2)},\cdots,w_n^{(2)})^T$

同样求第3层(方案)对第2层每一元素(准则)的权向量

方案层对C_1(景色)的成对比较阵	方案层对C_2(费用)的成对比较阵	$\ldots C_n$
$B_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 1/2 & 1 & 2\\ 1/5 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$	$B_2=\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 1/8\\ 3 & 1 & 1/3\\ 8 & 3 & 1\end{bmatrix}$	$\ldots B_n$
最大特征根 λ_1	λ_2	$\ldots \lambda_n$
权向量 $w_1^{(3)}$	$w_2^{(3)}$	$\ldots w_n^{(3)}$

组合权向量

第3层对第2层的计算结果

k	1	2	3	4	5
$w_k^{(3)}$	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166
	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166
	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0

$w^{(2)}$

0.263
0.475
0.055
0.090
0.110

RI=0.58 (n=3), CI_k 均可通过一致性检验

方案P_1对目标的组合权重为0.595×0.263+ …=0.300

方案层对目标的组合权向量为 $(0.300, 0.246, 0.456)^T$

组合权向量

第2层对第1层的权向量

第1层O

第2层$C_1,\ldots C_n$

第3层$P_1, \ldots P_m$

$$w^{(2)}=(w_1^{(2)},\cdots,w_n^{(2)})^T$$

第3层对第2层各元素的权向量

$$w_k^{(3)}=(w_{k1}^{(3)},\cdots,w_{km}^{(3)})^T,\ k=1,2,\cdots,n$$

构造矩阵 $W^{(3)}=[w_1^{(3)},\cdots,w_n^{(3)}]$

则第3层对第1层的组合权向量 $w^{(3)}=W^{(3)}w^{(2)}$

第s层对第1层的组合权向量

$$w^{(s)}=W^{(s)}W^{(s-1)}\cdots W^{(3)}w^{(2)}$$

其中$W^{(p)}$是由第p层对第p-1层权向量组成的矩阵

层次分析法的基本步骤

1. **建立层次分析结构模型**
   - 深入分析实际问题，将有关因素自上而下分层（目标—准则或指标—方案或对象），上层受下层影响，而层内各因素基本上相对独立。

2. **构造成对比较阵**
   - 用成对比较法和1~9尺度，构造各层对上一层每一因素的成对比较阵。

3. **计算权向量并作一致性检验**
   - 对每一成对比较阵计算最大特征根和特征向量，作一致性检验，若通过，则特征向量为权向量。

4. **计算组合权向量（作组合一致性检验*）**
   - 组合权向量可作为决策的定量依据。

1. 正互反阵的最大特征根和特征向量的性质

定理1　正矩阵A的最大特征根λ是正单根，对应正特征向量w，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{e^T A^k e}=w,\quad e=(1,1,\cdots,1)^T$$

⇒ 正互反阵的最大特征根是正数，特征向量是正向量。

定理2　n阶正互反阵A的最大特征根$\lambda=n$，$\lambda=n$是A为一致阵的充要条件。

⇒ 一致性指标 $CI=\dfrac{\lambda-n}{n-1}$ 定义合理

根据实际情况定义 f

Index Function f(λ-n)

- **f(0)=0, f(x) 单调上升**

1. 正互反阵的最大特征根和特征向量的性质

Theorem A.1 (Perron-Frobenius). *Given a square matrix* $\mathbf{A}$, *if* $\mathbf{A}$ *is positive, i.e.* $a_{ij} > 0\ \forall i, j$, *then its maximum eigenvalue is real,* $\lambda_{\max} \in \mathbb{R}$.

```
-0.4658 + 0.0000i
-0.8409 + 0.0000i
-0.0951 + 0.0000i
-0.1733 + 0.0000i
-0.1920 + 0.0000i
```

特征向量都是负数：

w0=[-0.4658; -0.8409; -0.0951; -0.1733; -0.1920];

w= w0./sum(w0)

$$Aw = \lambda w$$

特征向量作为权向量的好处: 特征向量体现多步累积效应

- **PCA:** 主成分分析，最重要方向的权重
- 可以根据实际情况做些小改动
- 保证结果还是单位向量

一致阵A, 权向量$w=(w_1,\ldots w_n)^T$, $a_{ij}=w_i/w_j$

A不一致, 应选权向量w使w_i/w_j与 a_{ij}相差尽量小（对所有i,j)。

用拟合方法确定*w*

$$\min_{w_i\,(i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}-\frac{w_i}{w_j}\right)^2$$

非线性最小二乘

线性化——对数最小二乘

$$\min_{w_i\,(i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\ln a_{ij}-\ln\frac{w_i}{w_j}\right)^2$$

考虑实际情况的权向量

进一步

$$\min_{w_i\,(i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\ln a_{ij}-\ln\frac{w_i}{w_j}\right)^2 + \alpha\cdot f(w)$$

MatLab

```
A = [1 2 6;1/2 1 4;1/6 1/4 1];
%%一致性计算和权向量计算
n = size(A,1);
[v,d] = eig(A);
r = d(1,1);
CI = (r-n)/(n-1);
RI = [0 0 0.58 0.90 1.12 1.24 1.32 1.41 1.45 1.49 1.52 1.54 1.56 1.58 1.59];
CR = CI/RI(n);
if CR<0.10
    CR_Result = ‘yes';
else
    CR_Result = ‘no';
end
% % 权向量计算
w = v(:,1)/sum(v(:,1));
w = w';
disp('该判断矩阵权向量计算报告：');
disp('一致性指标：'); disp(num2str(CI));
disp('一致性比例：'); disp(num2str(CR));
disp('一致性检验结果：'); disp(CR_Result);
disp('特征值:'); disp(num2str(r));
disp('权向量:');disp(num2str(w));
```

总结

- **应用领域**：经济计划和管理，能源政策和分配，人才选拔和评价，生产决策，交通运输，科研选题，产业结构，教育，医疗，环境，军事等。

- **处理问题类型**：决策、评价、分析、预测等。

- 作比较判断时人的主观选择起相当大的作用，各因素的重要性难以量化。

- **AHP** — 一种定性与定量相结合的、系统化、层次化的分析方法。