深圳北理莫斯科大学
УНИВЕРСИТЕТ МГУ-ППИ В ШЭНЬЧЖЭНЕ
SHENZHEN MSU-BIT UNIVERSITY

# Математическое моделирование и исследование моделей с помощью математических программ

# 数学建模及数学软件的使用

## Лекция № 5 (博弈论)

张晔

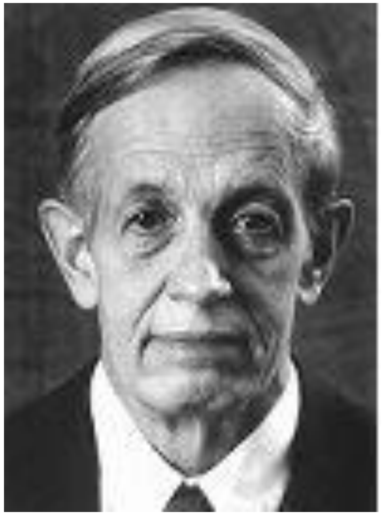
ye.zhang@smbu.edu.cn

# Теория игр/ Game Theory/ 博弈论

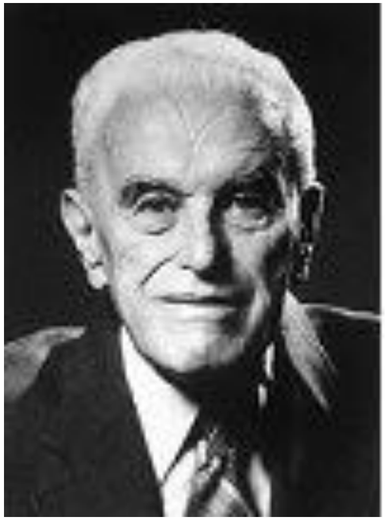
- 主要研究公式化了的激励结构（游戏或者博弈）间的相互作用。是研究具有斗争或竞争性质现象的数学理论和方法。
- 1944年冯 诺伊曼与奥斯卡 摩根斯特恩合著《博弈论与经济行为》，标志着现代系统博弈理论的的初步形成，因此他被称为“博弈论之父”。
- 博弈论被认为是20世纪经济学最伟大的成果之一。

# 1994年诺贝尔经济学奖获得者

- 美国人约翰-海萨尼(John C. Harsanyi) 和美国人约翰-纳什(John F. Nash Jr.)以及德国人莱因哈德-泽尔腾(Reinhard Selten)
- **获奖理由：** 在非合作博弈的均衡分析理论方面做出了开创性的贡献，对博弈论和经济学产生了重大影响 。



约翰·纳什，美国
**1928 -- 2015**



约翰·海萨尼
1920年生于美国

莱因哈德·泽尔腾，
1930年生于德国

# 1996年诺贝尔经济学奖获得者

- 英国人詹姆斯·莫里斯 (James A. Mirrlees)和美国人威廉-维克瑞(William Vickrey)
- 获奖理由：前者在信息经济学理论领域做出了重大贡献，尤其是不对称信息条件下的经济激励理论的论述；后者在信息经济学、激励理论、博弈论等方面都做出了重大贡献。

詹姆斯·莫里斯

1936年生于英国

威廉·维克瑞，

1914-1996，

生于美国

# 2001年诺贝尔经济学奖获得者

- 三位美国学者乔治-阿克尔洛夫(George A. Akerlof)、迈克尔-斯彭斯(A. Michael Spence)和约瑟夫-斯蒂格利茨(Joseph E. Stiglitz)
- **获奖理由：** 在“对充满不对称信息市场进行分析”领域做出了重要贡献。


乔治·阿克尔洛夫

1940年生于美国的纽黑文，1966年获美国麻省理工学院博士头衔，现为美国加利福尼亚州大学经济学教授。

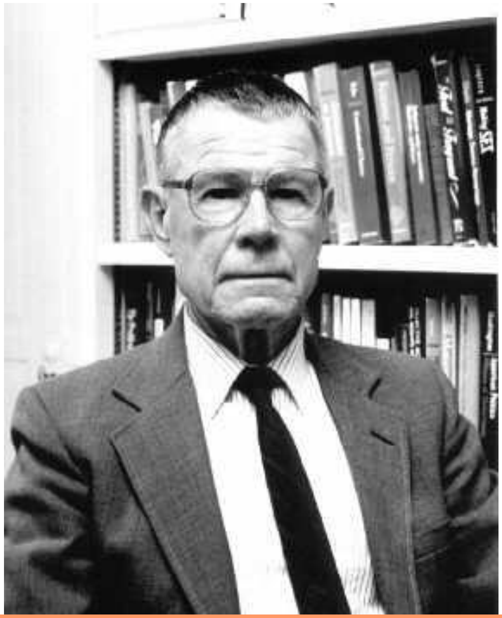

迈克尔·斯彭斯

1948年生于美国的新泽西，1972年获美国哈佛大学博士头衔，现兼任美国哈佛和斯坦福两所大学的教授。


约瑟夫·斯蒂格利茨，1943年生于美国的印第安纳州，1967年获美国麻省理工学院博士头衔，曾担任世界银行的首席经济学家，现任美国哥伦比亚大学经济学教授

# 2005年诺贝尔经济学奖获得者

- 以罗伯特 奥曼色列经济学家罗伯特－奥曼（Robert J. Aumann）和美国经济学家托马斯 谢林（Thomas C. Schelling)
- 获奖理由： “通过博弈论分析加强了我们对冲突和合作的理解”所作出的贡献而获奖。



罗伯特·奥曼　　　　托马斯·谢林

## 博弈论的基本类型

- 合作博弈（cooperative game）
  - 达成有约束力的协议（binding agreement），强调团体理性，强调效率、公正、公平
- 非合作博弈（non-cooperative game）
  - 强调个人理性，其结果可能有效率，也可能无效率。

## 非合作博弈的基本分类

| | 完全信息 | 不完全信息 |
|---|---|---|
| 静态 | 纳什均衡（NE） | 贝氏纳什均衡（BNE） |
| 动态 | 子博弈完美纳什均衡（SPNE） | 完美贝氏纳什均衡（PBNE）及序贯均衡（SE） |

## 静态博弈与动态博弈
## (static games and dynamic games)

- 同时决策或者同时行动的博弈属于静态博弈；先后或序贯决策或者行动的博弈，属于动态博弈
- 即使决策或行动有先后，但只要局中人在决策时都还不知道对手的决策或者行动是什么，也算是静态博弈

## 完全信息博弈与不完全信息博弈
## (games of complete information and games of incomplete information)

- 按照大家是否清楚对局情况下每个局中人的得益。
- “各种对局情况下每个人的得益是多少” 是所有局中人的共同知识（common knowledge）。
- 据“共同知识”的掌握分为完全信息与不完全信息博弈。

## 完美信息博弈与不完美信息博弈
## (games with perfect information and games with imperfect information)

- 是关于动态博弈进行过程之中面临决策或者行动的参与人对于博弈进行迄今的历史是否清楚的一种刻划。
- 如果在博弈进行过程中的每一时刻，面临决策或者行动的参与人，对于博弈进行到这个时刻为止所有参与人曾经采取的决策或者行动完全清楚，则称为完美信息博弈；否则位不完美信息。

## 零和博弈与非零和博弈
## (zero-sum game and non-zero-sum game)

- 如果一个博弈在所有各种对局下全体参与人之得益总和总是保持为零，这个博弈就叫零和博弈；
- 相反，如果一个博弈在所有各种对局下全体参与人之得益总和不总是保持为零，这个博弈就叫非零和博弈。
- 零和博弈是利益对抗程度最高的博弈。

# 例子：囚徒困境

| 支付 嫌疑人B / 嫌疑人A | 抵赖 | 坦白 |
| --- | --- | --- |
| 抵赖 | −1，−1 | −9，0 |
| 坦白 | 0，−9 | −6，−6 |

- 合作囚徒困境是一个非零和博弈。
- “**纳什均衡**”（也叫非合作均衡）：
  - 均衡战略（坦白，坦白）
  - 均衡支付（−6，−6）
- 纳什均衡属于**NP问题**，Daskalakis证明它属于NP问题的一个子集，不是通常认为的NP-完全问题，而是PPAD-完全问题。

# 斯塔克尔伯格模型或称斯塔克尔伯格竞争 (Stackelberg Leadership Model, Stackelberg Competition)

- Stackelberg：德国经济学家、1905出生于莫斯科
- 斯塔克尔伯格港口竞争机制模型
  - 描述一个充当领导者的厂商与作为追随者的厂商之间的相互影响

## 假设条件如下：

1．有两个港口1、2，港口1是产量领导者，产量为$y_1$，港口2是跟随者，即根据港口1的选择而选择产量$y_2$。市场价格是总产量的函数，即$p = f(y_1 + y_2)$；反需求函数可以认为是$p = a - b(y_1 + y_2)$。

2．港口1、2均根据自己的产量确定最大化利润，且两个港口的边际成本为0。（边际成本是指厂商每增加一单位产量所增加的成本。）

3．由于港口1在整个行业处于支配地位，港口2将在港口1产量确定的情况下实现利润最大化，而港口1也知道港口2根据自己产量确定它的产量，即完全信息。

4．港口2根据港口1确定产量，对港口2而言，港口1的产量是常量，港口1在选择产量时也会考虑到其对港口2的影响。

由于其成本假设为0，港口2的利润函数为：$\pi_2 = py_2 = ay_2 - by_1y_2 - by_2^2$

- 利润最大化的条件：$\frac{\delta \pi_2}{\delta y_2} = a - by_1 - 2by_2 = 0$
- 所以，求得反应函数：$y_2 = \frac{1}{2b}(a - by_1)$
- 将上面的反应函数代入港口1的利润函数：

$$\pi_1 = py_1 = ay_1 - by_1y_2 - by_1^2 = ay_1 - \frac{1}{2}y_1(a - by_1) - by_1^2$$

- 其利润最大化条件：$\frac{\delta \pi_1}{\delta y_1} = \frac{1}{2}a - by_1 = 0$
- 所以均衡时港口1最大利润化的产量：$y_1 = \frac{a}{2b}$
- 那么，同理可以求出港口2最大利润化的产量：$y_2 = \frac{a}{4b}$
- 在斯塔克尔伯格模型下均衡时两个港口的产量分别为：$(\frac{a}{2b}, \frac{a}{4b})$
- 此时港口1、港口2的收益分别为：

$$\pi_1 = py_1 = (a - b \times \frac{3a}{4b}) \times \frac{a}{2b} = \frac{a^2}{8b} \quad \pi_2 = py_2 = (a - b \times \frac{3a}{4b}) \times \frac{a}{2b} = \frac{a^2}{16b}$$

- 这样，在港口1的产量领导下，港口1和港口2实现了短期的均衡，均衡时的产量为 $(\frac{a}{2b}, \frac{a}{4b})$ ，市场价格 $p = \frac{a}{4}$ 。港口1获得的利润大于港口2的利润，说明了先动者的优势，并且，港口1通过产量的选择限制了港口2的进入规模。