深圳北理莫斯科大学
УНИВЕРСИТЕТ МГУ-ППИ В ШЭНЬЧЖЭНЕ
SHENZHEN MSU-BIT UNIVERSITY

Математическое моделирование и исследование моделей с помощью математических программ

数学建模及数学软件的使用

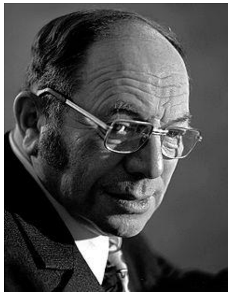
Лекция № 7b (线性规划)

张晔

ye.zhang@smbu.edu.cn

Линейное программирование/Linear programming/ 线性规划

- 法国数学家J.- B.- J.傅里叶和C.瓦莱 - 普森分别于1832和1911年独立地提出线性规划的想法，但未引起注意。
- 1939年苏联数学家Леонид Витальевич Канторович在《生产组织与计划中的数学方法》一书中提出线性规划问题，也未引起重视。
- 1947年美国数学家G.B.Dantzing提出求解线性规划的单纯形法，为这门学科奠定了基础。P.S.: 丹齐格的父亲托比阿斯•丹齐格是1名俄罗斯数学家，曾在巴黎与大数学家昂利•庞加莱学习。
- 1947年美国数学家J.von诺伊曼提出对偶理论,开创了线性规划的许多新的研究领域，扩大了它的应用范围和解题能力。
- 1951年美国经济学家T.C.库普曼斯把线性规划应用到经济领域，为此与康托罗维奇一起获1975年诺贝尔经济学奖。



例子：

以下是一个线性规划的例子。假设一个农夫有一块A平方千米的农地，打算种植小麦或大麦，或是两者依某一比例混合种植。该农夫只可以使用有限数量的肥料F和农药P，而单位面积的小麦和大麦都需要不同数量的肥料和农药，小麦以(F_1, P_1)表示，大麦以(F_2, P_2)表示。设小麦和大麦的售出价格分别为S_1和S_2，则小麦与大麦的种植面积问题可以表示为以下的线性规划问题：

$$\max Z = S_1 x_1 + S_2 x_2 \quad \text{(最大化利润 - 目标函数)}$$

$$s.t.\ x_1 + x_2 \le A \quad \text{(种植面积的限制)}$$

$$F_1 x_1 + F_2 x_2 \le F \quad \text{(肥料数量的限制)}$$

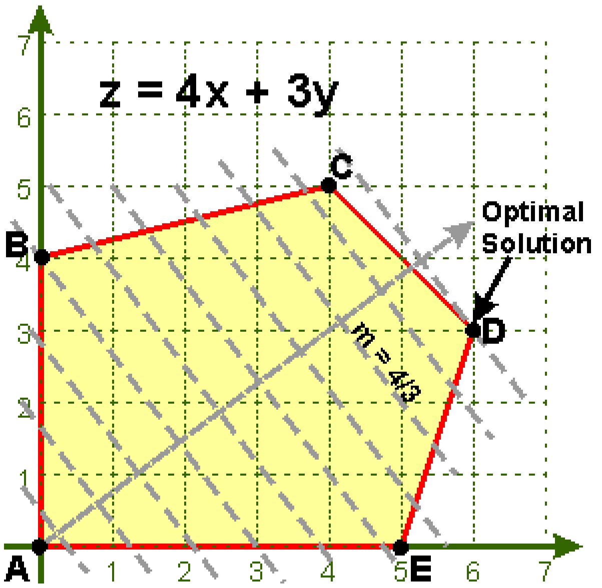
$$P_1 x_1 + P_2 x_2 \le P \quad \text{(农药数量的限制)}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \quad \text{(不可以栽种负数的面积)}$$

线性规划:单纯形法

Linear Programming (LP) Problem:

$$\min \quad c^T x$$
$$A\,x = b$$
$$x \geq 0$$



单纯形方法

$$\hat{x} \geq 0, \quad A\hat{x} = b$$
$$\hat{x}_i = 0 \quad \text{if } i \in N$$

$$\{1, ..., n\} = B \cup N$$
$$B \cap N = \Phi$$
$$|N| = n - m$$

逐步调整N → 得到解

G. Dantzig(1914-2005)

单纯形方法的计算

列表法

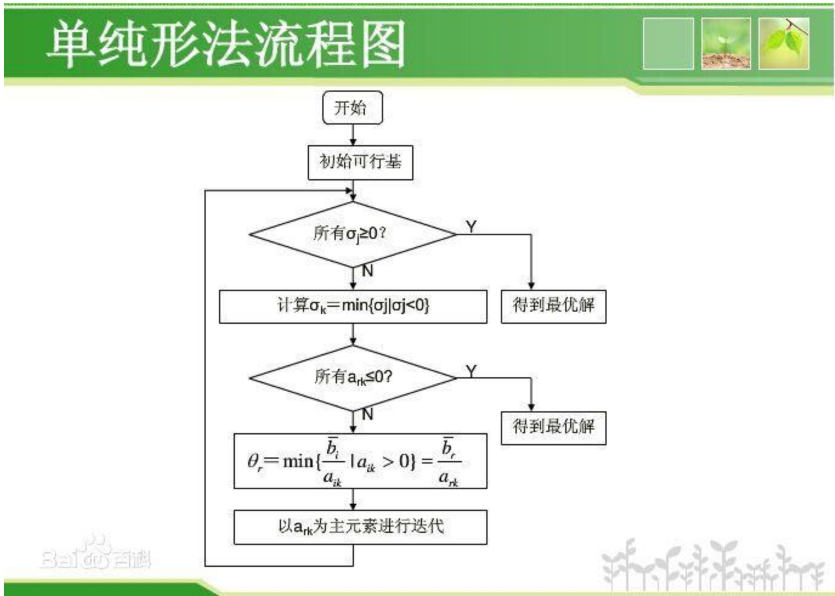
c	0
A	b

$x = (x_B\ x_N)$ 顶点：$(x_B\ \ 0)$

0	c_N	$-f$
I	A_N	$\underline{b}$
x_B	x_N	

Симплекс-метод/Simplex algorithm/单纯形法

- 单纯形算法利用多面体的顶点构造一个可能的解，然后沿着多面体的边走到目标函数值更高的另一个顶点，直至到达最优解为止。
- 单纯形法的最坏时间复杂度为指数级别。
- 椭球算法和内点算法均为解决线性规划的多项式时间算法。



线性规划：内点法

Interior Point Method (Karmarkar, 1984)

$x_k > 0 \rightarrow$ 内点

N. Karmarkar(1957-)

- **单纯形法**最古老，被研究的最为透彻，商业化软件也最成熟

- **椭球算法**像昙花一现，虽然在理论上证明了线性规划问题可在多项式时间内求解，但在实际应用上反而不如单纯形法来的有效便捷

- 内点法是最新的设计，理论上它比椭球法还要有效，实际应用上它也可以与单纯形法相抗衡，不少商业化软件已经上市，前景甚佳

整数规划

例1 集装箱运货问题：

已知甲乙两种货物的装运和获利情况如下表所示，问：甲乙两货物各托运多少箱，可使获得利润最大？

货物	体积（m^3/箱）	重量（100kg/箱）	利润（1000元/箱）
甲	5	2	20
乙	4	5	10
装运限制	24	13	

解：设 x_1, x_2 为甲乙两货物各托运箱数

$$\max z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

0-1规划

- **0-1背包问题：NP完全**

例5一个旅行者要到某地作两周的带包旅行,装背包时,他发现除了已装的必需物件外,他还能再装5公斤重的东西.他打算从下列4种东西中选取,使增加的重量不超过5公斤又能使使用价值最大.这4种东西的重量和使用价值(这里用打分数的办法表示价值)如下表所示,问旅行者应该选取哪些物件为好?

物品序号	物件	重量	价值
1	录音机	2	6
2	罐头	3	7
3	手电筒	1	3
4	书籍	4	9

解：建立模型为

$$\max Z=6x_1+7x_2+3x_3+9x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3+4x_4\le 5\\ x_i=0,1\left(i=1,2,3,4\right)\end{cases}$$

(x_1, x_2, x_3, x_4)	约束条件	满足条件 是√否×	Z值
(0,0,0,0)	0	√	0
(0,0,0,1)	4	√	9
(0,0,1,0)	1	√	3
(0,1,0,0)	3	√	7
(1,0,0,0)	2	√	6
(0,0,1,1)	5	√	12
(0,1,0,1)	7	×	
(0,1,1,0)	4	√	10
(1,0,0,1)	6	×	
(1,0,1,0)	3	√	9
(1,1,0,0)	5	√	13
(0,1,1,1)	8	×	
(1,0,1,1)	7	×	
(1,1,0,1)	9	×	
(1,1,1,0)	6	×	
(1,1,1,1)	10	×	

软件

标准型的矩阵表达

Matlab语法

$$\min f = c^{\mathrm{T}} x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ l_b \le x \le u_b \end{cases}$$

```
f=[3 6];
A=[-1 0; 0 -1; 1 2; -1 0; 0 -1];
b=[-4; -3; 10; 0; 0];
[x,fval]=linprog(f,A,b)
```

```
[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b)
[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq)
[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)
[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)
```

options由optimset设置参数，exitflag取值从 -7到1